Математические заметки

Том 106 выпуск 6 декабрь 2019

УДК 512.7

О нерациональных слоях в расслоениях на поверхности дель Пеццо над кривой

К. В. Логинов

В этой заметке мы рассматриваем трехмерные расслоения на поверхности дель Пеццо с нерациональным центральным слоем. Предполагая, что особенности тотального пространства не хуже, чем обыкновенные двойные точки, при помощи конструкции замены базы мы показываем, что существует взаимно-однозначное соответствие между такими расслоениями и некоторыми неособыми расслоениями на поверхности дель Пеццо с действием циклической группы.

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: расслоения Мори, поверхности дель Пеццо, рациональность.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12257

Введение. Хорошо известно, что кубическая поверхность дель Пеццо может вырождаться в конус над эллиптической кривой в неособом семействе. Мы изучаем условия, при которых поверхность дель Пеццо произвольной степени может вырождаться в нерациональную поверхность в "достаточно хорошем" семействе. Более точно, мы рассматриваем расслоения на поверхности дель Пеццо в смысле программы минимальных моделей, см. определение 1.1. В частности, тотальное пространство таких расслоений должно иметь не хуже, чем терминальные особенности. Основной инвариант таких расслоений – степень общего слоя $K_{X_\eta}^2$. Так как общий слой неособ, имеем $1 \leqslant K_{X_\eta}^2 \leqslant 9$. Вопрос рациональности слоев локален по базе, поэтому мы рассматриваем расслоения над ростком кривой.

Если мы применим программу минимальных моделей к неособому рационально связному многообразию U над полем комплексных чисел, то получим бирациональное ему многообразие X со структурой расслоения Мори. Это значит, что существует морфизм $\pi\colon X \to B$ со связными слоями, π-обильным антиканоническим классом $-K_X$ и с условием $\dim B < \dim X$. Если $\dim B = 0$, то X является многообразием Фано. Проблема рациональности для таких многообразий далека от своего решения. Результаты о рациональности в гладком случае см. в [1; гл. 12].

Работа частично финансировалась в рамках программы государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5-100", Фондом Саймонса, а также Фондом развития теоретической физики и математики "БАЗИС".

Если $\dim B = 2$, то π называется $\mathbb{Q}$-*расслоением на коники.* Общий слой такого расслоения – неособая рациональная кривая, специальные слои представляют собой деревья рациональных кривых, быть может, с кратностями. Таким образом, проблема рациональности для слоев тривиальна. Мы рассматриваем случай $\dim B = 1$. В этом случае π называется расслоением на поверхности дель Пеццо. Общий слой π рационален. Но специальный слой может быть нерациональным. Легко видеть, что он является поверхностью, бирационально расслоенной над кривой C рода $g(C) > 0$.

В этой работе мы показываем, что свойства такого расслоения с нерациональным центральным слоем, например, значение $g(C)$, зависят от степени слоя и от особенностей тотального пространства X. В предложении 1.3 доказывается, что если X неособо (соответственно, имеет терминальные горенштейновы особенности), то $K_{X_\eta}^2 \leqslant 3$ (соответственно, $\leqslant 4$) и нерациональный слой изоморфен обобщенному конусу над эллиптической кривой. Этот факт элементарно следует из классификации горенштейновых поверхностей дель Пеццо [2]. Из замечания 1.2 следует, что в терминальном горенштейновом случае любой слой приведен и неприводим, и если слой нерационален, то он нормален. С другой стороны, в терминальном негоренштейновом случае возможны кратные слои. В работе [3] показано, что их кратность не превосходит шести.

В теореме 2.3 мы используем конструкцию замены базы, чтобы показать, что существует взаимно-однозначное соответствие между расслоениями на поверхности дель Пеццо с нерациональным центральным слоем и некоторыми неособыми $\boldsymbol{\mu}_n$-расслоениями на поверхности дель Пеццо, а также явно описываем центральный слой таких расслоений.

Этот результат показывает, что нерациональные слои терминальных горенштейновых расслоений на поверхности дель Пеццо образуют очень ограниченный класс. С другой стороны, если X имеет хуже, чем терминальные особенности, то нерациональные слои неограничены, см. пример 1.7. Также существуют примеры нерациональных слоев, бирационально расслоенных над кривой C рода $g(C) = 2, 3, 4$. Неизвестно, можно ли добиться $g(C) > 4$ в этом случае, см. вопрос 1.6.

Далее, мы рассматриваем расслоения с простейшими особенностями – обыкновенными двойными точками. Используя конструкцию замены базы, мы классифицируем такие расслоения в терминах неособых $\boldsymbol{\mu}_n$-расслоений на поверхности дель Пеццо, см. теорему 3.3. Оказывается, что в этом случае $K_{X_\eta}^2 = 1$ или 4.

Другие результаты о рациональности в семействах см. в [4]–[6]. Классификация нерациональных поверхностей дель Пеццо изложена в [2], [7].

1. Предварительные сведения. Мы работаем над полем комплексных чисел. Мы используем терминологию и обозначения программы минимальных моделей, см., например, [8], [9].

Определение 1.1. Пусть X – трехмерное нормальное проективное многообразие с $\mathbb{Q}$-факториальными терминальными особенностями, и пусть B – неособая кривая. Предположим, что существует проективный морфизм $\pi\colon X \to B$ со следующими свойствами:

(i) π имеет связные слои;

(ii) $-K_X$ является π-обильным (соответственно, π-численно эффективным и π-объемным);

(iii) π является экстремальным стягиванием, т.е. $\rho(X/B) = 1$.

Тогда $\pi\colon X \to B$ называется *расслоением на поверхности дель Пеццо* (соответственно, *слабым расслоением на поверхности дель Пеццо*). *Степенью* расслоения π называется степень общего слоя X_η. Так как X терминально, то X_η – неособая поверхность дель Пеццо.

Будем говорить, что расслоение на поверхности дель Пеццо $\pi\colon X \to B$ является *неособым* (соответственно, *горенштейновым*), если многообразие X неособо (соответственно, горенштейново). Если в определении выше X является аналитическим пространством, а отображение π – собственным, будем называть $\pi\colon X \to B$ *аналитическим расслоением на поверхности дель Пеццо*. Если X рассматривается над ростком кривой $o \in B$, мы будем пользоваться обозначением

$$\pi\colon X \to B \ni o.$$

Пусть G – группа, действующая на расслоении π. Тогда мы можем определить *G-расслоение на поверхности дель Пеццо*, если в определении 1.1 потребовать, чтобы X было $G\mathbb{Q}$-факториальным (т.е., любой G-инвариантный дивизор Вейля является дивизором $\mathbb{Q}$-Картье), и $\rho^G(X/B) = 1$. Мы будем работать с $\boldsymbol{\mu}_n$-расслоениями на поверхности дель Пеццо, где $\boldsymbol{\mu}_n$ – циклическая группа, содержащая n элементов. Зафиксируем примитивный корень из единицы степени n и обозначим его через ζ_n.

Замечание 1.2. Рассмотрим горенштейново расслоение $\pi\colon X \to B \ni o$ на поверхности дель Пеццо над ростком кривой. Обозначим его центральный слой $\pi^{-1}(o)$ через F. Так как выполнено $\rho(X/B) = 1$, то F неприводим. Так как X горенштейново, F приведен [10; 5.1]. Предположим, что F нерационален. Тогда F нормален согласно [11], [12].

Предложение 1.3. *Рассмотрим горенштейново расслоение $\pi\colon X \to B \ni o$ на поверхности дель Пеццо над ростком кривой. Предположим, что его центральный слой $F = \pi^{-1}(o)$ нерационален. Тогда F – обобщенный конус над эллиптической кривой и $K_F^2 \leqslant 4$. Если X неособо, то $K_F^2 \leqslant 3$.*

Доказательство. Первое утверждение следует из классификации горенштейновых поверхностей дель Пеццо, см., например, [2]. Поверхность F имеет одну простую эллиптическую особенность x_0. Рассмотрим минимальное разрешение $\phi\colon T \to F$. Имеем

$$K_T = \phi^* K_F - E_0,$$

где E_0 – неособая эллиптическая кривая. Отсюда

$$K_T^2 = K_F^2 + E_0^2 = d + E_0^2.$$

По формуле Нётера $K_T^2 + \chi_{\mathrm{top}}(T) = 12\chi(\mathscr{O}_T) = 0$ и $\chi_{\mathrm{top}}(T) = 0$, так как T – линейчатая поверхность над эллиптической кривой. Таким образом, $d = -E_0^2$. В [13; 4.57] показано, что размерность касательного пространства к F в точке x_0 равна $\max(3, -E_0^2)$. Если X горенштейново, оно имеет гиперповерхностные особенности, следовательно, $-E_0^2 = d \leqslant 4$. Если X неособо, то $-E_0^2 = d \leqslant 3$. Предложение доказано.

Следующий пример показывает, что случай $d=4$ реализуется.

Пример 1.4. Пусть X задано уравнениями

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+tx_5^2=0,$$
$$a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2+a_4x_4^2+tx_5^2=0$$

в $\mathbb{P}^4\times\mathbb{A}^1_t$, где $a_i\in\mathbb{C}$. Несложно проверить, что для общего выбора a_i многообразие X имеет одну особую точку типа cA_1, и слой F над $0\in\mathbb{A}^1_t$ является конусом над эллиптической кривой.

Существуют примеры негоренштейновых расслоений с центральным слоем, бирациональным $\mathbb{P}^1\times C$ с $g(C)>1$.

Пример 1.5. (i) Пусть

$$X=(f_6(x,y,w)+tz^3=0)\subset\mathbb{P}(1,1,2,3)\times\mathbb{A}^1_t,$$

где (x,y,z,w) имеют веса $(1,1,2,3)$, полином f_6 имеет степень 6 и является общим. Морфизм $\pi\colon X\to B=\mathbb{A}^1_t$ индуцирован проекцией на второй сомножитель. Многообразие X имеет одну терминальную особенность типа $(1/2)(1,1,1)$. Общий слой является неособой поверхностью дель Пеццо степени 1. Центральный слой $F=\pi^{-1}(0)$ – конус над гиперэллиптической кривой C рода 2.

(ii) Пусть

$$X=(f_4(x,y,z)+tw^2=0)\subset\mathbb{P}(1,1,1,2)\times\mathbb{A}^1_t,$$

где (x,y,z,w) имеют веса $(1,1,1,2)$. Многообразие X имеет одну терминальную особенность типа $(1/2)(1,1,1)$. Общий слой является неособой поверхностью дель Пеццо степени 2. Центральный слой $F=\pi^{-1}(0)$ – конус над плоской квартикой C. Таким образом, $g(C)=3$.

(iii) Пусть

$$X=(f_6(x,y,z)+tw^2=0)\subset\mathbb{P}(1,1,2,3)\times\mathbb{A}^1_t,$$

где (x,y,z,w) имеют веса $(1,1,2,3)$. Многообразие X имеет одну терминальную особенность типа $(1/3)(1,1,2)$. Общий слой является неособой поверхностью дель Пеццо степени 1. Центральный слой F – конус над тригональной кривой C рода 4.

В рассмотренных выше примерах центральный слой F нормален. Однако для специального выбора полинома f_i можно добиться того, чтобы F был ненормальным и нерациональным. В горенштейновом случае такое невозможно по замечанию 1.2. Следующий естественный вопрос был задан Дж. Бланком:

Вопрос 1.6. Существует ли расслоение на поверхности дель Пеццо $\pi\colon X\to B$ такое, что его слой бирационален $\mathbb{P}^1\times C$ с условием $g(C)>4$?

В данный момент ответ на этот вопрос неизвестен. Терминальные особенности являются существенным ограничением, как видно из следующего примера.

Пример 1.7. В этом примере мы рассмотрим расслоение, имеющее особенности хуже, чем терминальные. Определим $\pi\colon X\to B$ следующим образом:

$$X=(f_n(x,y,z)+tw=0)\subset\mathbb{P}(1,1,1,n)\times\mathbb{A}^1_t,$$

где координаты x, y, z, w имеют веса $(1,1,1,n)$, полином f_n выбран общим и имеет степень n, а π индуцировано проекцией на второй сомножитель. Ясно, что X имеет одну особую точку $(1/n)(1,1,1)$. В частности, X лог-терминально. Общий слой изоморфен $\mathbb{P}^2$. Слой $F=\pi^{-1}(0)$ является конусом над плоской кривой степени n. Аналогично можно построить лог-терминальные вырождения к конусу над кривой сколь угодно большого рода в расслоениях на поверхности дель Пеццо любой степени $1\leqslant d\leqslant 9$, см. [14; 3.9].

2. Неособые расслоения. Рассмотрим расслоение на поверхности дель Пеццо $\pi\colon X\to B\ni o$ над ростком кривой. Предположим, что оно неособо, и центральный слой $F=\pi^{-1}(o)$ нерационален. Тогда $K_F^2\leqslant 3$ по предложению 1.3. Для классификации таких расслоений нам потребуется конструкция замены базы.

Конструкция 2.1. Согласно [2] поверхность F имеет одну простую эллиптическую особенность x_0. Согласно [13; 4.57] существует взвешенное раздутие, индуцирующее минимальное разрешение такой особенности. Обозначим это раздутие через $\psi\colon Z\to X$, его веса через (c_1,c_2,c_3), где c_i – некоторые числа, которые мы укажем позднее. Тогда $F_Z=\psi_*^{-1}F$ неособо. Имеем

$$K_{F_Z}=\psi|_{F_Z}^*F-E|_{F_Z}.$$

Заметим, что $E|_{F_Z}$ – приведенная неприводимая неособая эллиптическая кривая. Обозначим ее через C. Имеем $F_Z=\psi^*F-nE$ для $n\geqslant 2$ и $E\simeq\mathbb{P}(c_1,c_2,c_3)$. Тогда

$$K_Z=\psi^*K_X+(n-1)E,\qquad n=c_1+c_2+c_3.$$

После раздутия ψ многообразие Z может иметь циклические фактор-особенности. Тем не менее, F_Z не будет через них проходить. Действительно, пусть z_0 – особая точка на Z, и $z_0\in F_Z$. Так как z_0 – циклическая фактор-особенность, $\mathbb{C}^3$ накрывает аналитическую окрестность U точки z_0. Это накрытие индуцирует неразветвленное накрытие окрестности $F_Z\cap U-\{z_0\}$. Но F_Z неособо, поэтому $\pi_1(F_Z\cap U-\{z_0\})=0$. Противоречие.

Сделаем замену базы. Выберем локальную координату t в точке $o\in B$ и рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi_W"] & Z \arrow[d, "\pi"'] \\ B' \arrow[r, "\alpha"] & B \end{tikzcd}$$

где $B'\simeq B$, $\alpha\colon t\mapsto t^n$ и W – нормализация $Z\times_B B'$. В общей точке E многообразие Z изоморфно

$$\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y,z,t]/(t-z^n),$$

а слой $\pi_Z^{-1}(o)$ дается уравнением $t=0$. После замены базы

$$\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y,z,t]/(t^n-z^n)$$

имеет особенности в коразмерности 1. После нормализации морфизм h этален в окрестности общей точки $E_W:=h^{-1}(E)$. Аналогично можно проверить, что h

разветвлен в $F_W := h^{-1}(F_Z)$ и всех особых точках Z. Заметим, что центральный слой $\pi_W^{-1}(o)$ приведен и приводим:

$$\pi_W^{-1}(o) = F_W + E_W,$$

где E_W накрывает E, и F_W изоморфно F_Z. Более точно, $h|_{E_W}$ тотально разветвлено в $E_W \cap F_W =: C_W$. Следовательно, F_W неособо и F_W пересекает E_W трансверсально. Группа Галуа $\boldsymbol{\mu}_n$ накрытия h действует на W, сохраняя центральный слой.

Сделаем $\boldsymbol{\mu}_n$-эквивариантное стягивание поверхности F_W (см. вычисления ниже) и получим $\boldsymbol{\mu}_n$-расслоение на поверхности дель Пеццо $\pi_V\colon V \to B$ с неособым рациональным центральным слоем. Конструкция показана в следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
F_W + E_W \subset W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\tau"] & Z \supset F_Z + nE \arrow[d, "\psi"'] \\
E_V \subset V \arrow[d, "\pi_V"] & X \supset F \arrow[d, "\pi"'] \\
B' \arrow[r, "\alpha"] & B
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

{eq2.

Вычисление 2.2. Как и выше, рассмотрим минимальное разрешение $\phi\colon T \to F$. Обозначим через f_T слой линейчатой поверхности T и через f_Z – слой $F_Z \simeq F_T$. Положим $f := \psi(f_Z)$. Напишем

$$\begin{aligned}
K_F \cdot f = \phi^* K_F \cdot \phi^* f = \phi^* K_F \cdot f_T = (K_T + E_0) \cdot f_T = -2 + 1 = -1, \\
K_Z \cdot f_Z = (\psi^* K_X + (n-1)E) \cdot f_Z = K_X \cdot f + n - 1 = K_F \cdot f + n - 1 = n - 2.
\end{aligned}$$

Мы хотим стянуть поверхность F_W. Вычислим $K_W \cdot f_W$, где f_W – слой поверхности $F_W \simeq F_Z$. Так как h тотально разветвлено в F_W, по формуле Гурвица имеем

$$K_W = h^* K_Z + (n-1)F_W.$$

Так как $(F_W + E_W) \equiv 0$ над B, то

$$\begin{aligned}
K_W \cdot f_W &= (h^* K_Z + (n-1)F_W) \cdot f_W = K_Z \cdot f_Z - (n-1)E_W \cdot f_W \\
&= n - 2 - (n-1) = -1.
\end{aligned}$$

Поэтому F_W может быть стянута в неособую кривую. Обозначим морфизм стягивания через $\tau\colon W \to V$. По формуле Гурвица для $h|_{E_W}$ имеем

$$K_{E_W} = h|_{E_W}^* \biggl(K_E + \frac{n-1}{n} R\biggr), \qquad K_E = -(c_1 + c_2 + c_3)H = -nH,$$

где $R \sim bH$ – дивизор ветвления, H – положительная образующая группы классов $\operatorname{Cl} E \simeq \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$.

Теперь пройдем по диаграмме (2.1) в обратную сторону. Начнем с $\boldsymbol{\mu}_n$-расслоения на поверхности дель Пеццо $\pi_V\colon V \to B'$ со следующими свойствами: центральный слой $E_V = \pi_V^{-1}(o)$ является $\boldsymbol{\mu}_n$-минимальной поверхностью дель Пеццо такой, что локус неподвижных точек для действия $\boldsymbol{\mu}_n$ является неособой эллиптической кривой C_V, причем действие $\boldsymbol{\mu}_n$ на проективизации нормального расслоения $\mathbb{P}(N_{C/V})$ тривиально. Раздуем кривую C_V и получим $\boldsymbol{\mu}_n$-расслоение на поверхности дель Пеццо $\pi_W\colon W \to B$ с центральным слоем E_W+F_W. Обозначим морфизм раздутия через $\tau\colon W \to V$. По предположению, $\boldsymbol{\mu}_n$ поточечно фиксирует F_W. Рассмотрим морфизм факторизации $h\colon W \to Z$ по действию $\boldsymbol{\mu}_n$. Заметим, что h разветвлено в F_W и E_W накрывает $h(E_W) =: E$. Несложно проверить, что любая кривая, лежащая в E, является K_Z-отрицательной. Следовательно, существует морфизм стягивания $\psi\colon Z \to X$ на терминальное расслоение на поверхности дель Пеццо $\pi\colon X \to B$. Мы утверждаем, что точка $x_0 := \psi(E)$ неособа на X. Рассмотрим три случая.

(i) $d=3$. Проверятся, что $E_W/\boldsymbol{\mu}_3 \simeq \mathbb{P}^2$ и f – сдутие в неособую точку.

(ii) $d=2$. Проверятся, что $E_W/\boldsymbol{\mu}_4 \simeq \mathbb{P}(1,1,2)$ и f – морфизм, обратный к взвешенному раздутию неособой точки с весами $(1,1,2)$.

(iii) $d=1$. Проверятся, что $E_W/\boldsymbol{\mu}_6 \simeq \mathbb{P}(1,2,3)$ и f – морфизм, обратный к взвешенному раздутию неособой точки с весами $(1,2,3)$.

Мы готовы приступить к доказательству следующей теоремы.

Теорема 2.3. *Рассмотрим неособое расслоение $\pi\colon X \to B \ni o$ на поверхности дель Пеццо над ростком кривой. Предположим, что его центральный слой $F = \pi^{-1}(o)$ нерационален. Тогда существует взаимно-однозначное соответствие между такими π и $\boldsymbol{\mu}_n$-расслоениями на поверхности дель Пеццо $\pi_V\colon V \to B$ со следующими свойствами*:

- *центральный слой $E_V = \pi_V^{-1}(o)$ является неособой $\boldsymbol{\mu}_n$-минимальной поверхностью дель Пеццо степени d*,
- *локус неподвижных точек действия $\boldsymbol{\mu}_n$ является неособой эллиптической кривой $C \subset E_V$*,
- *действие $\boldsymbol{\mu}_n$ на $\mathbb{P}(N_{C/V})$ тривиально.*

Возможны три случая:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(i)} & d=3,\ n=3, \quad E_V \simeq (w^3 = q_3(x,y,z)) \subset \mathbb{P}^3, \\
& \boldsymbol{\mu}_3\colon w \mapsto \zeta_3 w, \quad F \simeq (0 = q_3(x,y,z)) \subset \mathbb{P}^3; \\
\text{(ii)} & d=2,\ n=4, \quad E_V \simeq (w^2 = q_4(x,y)+z^4) \subset \mathbb{P}(1,1,1,2), \\
& \boldsymbol{\mu}_4\colon z \mapsto \sqrt{-1}z, \quad F \simeq (w^2 = q_4(x,y)) \subset \mathbb{P}(1,1,1,2); \\
\text{(iii)} & d=1,\ n=6, \quad E_V \simeq (w^2 = z^3+\alpha x^4 z+\beta x^6+y^6) \subset \mathbb{P}(1,1,2,3), \\
& \boldsymbol{\mu}_6\colon y \mapsto \zeta_6 y,\ \alpha,\beta\in\mathbb{C}, \quad F \simeq (w^2 = z^3+\alpha x^4 z+\beta x^6) \subset \mathbb{P}(1,1,2,3).
\end{array}
$$

Доказательство. По предложению 1.3 имеем $d \leqslant 3$. Рассмотрим три случая: $d = -E_0^2 = 1,2,3$. Согласно [13; 4.57] имеем $\operatorname{mult}_{x_0} F = 3,2,2$, соответственно. Мы будем применять конструкцию 2.1.

Случай $d=3$. В обозначениях конструкции 2.1 пусть ψ – стандартное раздутие точки x_0. Имеем

$$K_Z = \psi^* K_X + 2E, \qquad F_Z = \psi^* F - 3E$$

и $E \simeq \mathbb{P}^2$. По формуле присоединения $K_{F_Z} = \psi|_{F_Z}^* K_F - E|_{F_Z}$. Проверяется, что поверхность F_Z неособа. Проводя конструкцию 2.1, получаем неособое $\boldsymbol{\mu}_3$-расслоение на кубические поверхности дель Пеццо $\pi_V\colon V \to B$ с неособым центральным слоем $E_V = \pi^{-1}(o)$. Действие группы $\boldsymbol{\mu}_3$ поточечно фиксирует неособую эллиптическую кривую $C_V \subset E_V$. Так как E_V является $\boldsymbol{\mu}_3$-минимальной кубической поверхностью дель Пеццо, можно применить классификацию [15; 6.5] и получить случай (i) теоремы.

Случай $d=2$. Согласно [13; 4.57] с точностью до аналитической замены координат в окрестности x_0 центральный слой $F\subset X$ дается уравнением

$$q_4(x,y)+w^2=0,$$

и $\mathrm{mult}_{x_0}q_4=4$. Раздуем $x_0\in X$ с весами $(1,1,2)$ относительно координат x, y, w. Заметим, что раздутие с весами $(1,1,1)$ ведет к ненормальной поверхности F_Z. Получаем

$$K_Z=\psi^*K_X+3E, \qquad F_Z=\psi^*F-4E,$$

где $E\simeq\mathbb{P}(1,1,2)$ и $F_Z=\psi_*^{-1}F$. Поверхность F_Z неособа, и Z имеет одну особую точку p типа $(1/2)(1,1,1)$, которая соответствует вершине конуса E. Положим $C=E\cap F_Z$. Кривая C не проходит через p. Применим конструкцию 2.1. Можно проверить, что h разветвлено в двух точках $q_1,q_2\in W$ таких, что $\{q_1,q_2\}=h^{-1}(p)$ и многообразие W неособо. Стягивая F_W и используя классификацию [15; 6.6], получаем случай (ii) теоремы.

Случай $d=1$. Согласно [13; 4.57] с точностью до аналитической замены координат в окрестности x_0 центральный слой $F\subset X$ дается уравнением

$$w^2+z^3+zq_4(x)+q_6(x)=0,$$

где $\mathrm{mult}_{x_0}q_i\geqslant i$. Раздуем $x_0\in X$ с весами $(1,2,3)$ относительно координат x, z, w. Получаем

$$K_Z=\psi^*K_X+5E, \qquad F_Z=\psi^*F-6E,$$

где $E\simeq\mathbb{P}(1,2,3)$. Заметим, что поверхность F_Z неособа.

Легко видеть, что многообразие Z имеет две особые точки p_1 и p_2 типа $(1/2)(1,1,1)$ и $(1/3)(1,1,2)$. Они соответствуют особым точкам поверхности E. Положим $C=E\cap F_Z$. Кривая C не проходит через p_1, p_2. Можно проверить, что h разветвлено в прообразах p_1 и p_2 и что многообразие W неособо. Стягивая F_W и используя классификацию [15; 6.7], получаем случай (iii) теоремы. Доказательство закончено.

3. Обыкновенные двойные точки. Пусть расслоение на поверхности дель Пеццо $\pi\colon X\to B\ni o$ над ростком кривой имеет особенности, локально аналитически изоморфные $(xy+zt=0)\subset\mathbb{C}^4$. Такие точки называются *обыкновенными двойными*. По замечанию 1.2 любой слой π приведен и неприводим. Если центральный слой $F=\pi^{-1}(o)$ нерационален, то он является нормальной горенштейновой поверхностью дель Пеццо с одной простой эллиптической особенностью $x_0\in F$, см. [2].

Предложение 3.1. *Рассмотрим расслоение $\pi\colon X\to B\ni o$ на поверхности дель Пеццо над ростком кривой. Пусть X имеет особенности не хуже, чем обыкновенные двойные точки. Предположим, что центральный слой $F=\pi^{-1}(o)$ нерационален и что X имеет особенность, содержащуюся в F. Тогда F является обобщенным конусом над эллиптической кривой и степень $d=K_F^2$ равна либо* 1, *либо* 4.

Доказательство. Первое утверждение следует из классификации [2]. Так как F является дивизором Картье, X имеет единственную особую точку x_0, принадлежащую F. Рассмотрим стандартное разрешение $\psi\colon Z \to X$ обыкновенной двойной точки x_0. Исключительный дивизор E изоморфен $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Имеем

$$K_Z = \psi^* K_X + E, \qquad F_Z = \psi^* F - nE, \qquad K_{F_Z} = \psi|_{F_Z}^* K_F - (n-1)E|_{F_Z},$$

где $n \geqslant 1$. Рассмотрим два случая: $n \geqslant 2$ и $n = 1$.

Случай $n \geqslant 2$. Утверждается, что тогда $n = 2$ и F_Z неособо. Заметим, что все исключительные дивизоры для морфизма $\psi|_{\overline{F_Z}}$ имеют целые и отрицательные дискрепантности. Рассмотрим нормализацию $\nu\colon \overline{F_Z} \to F_Z$. Тогда дискрепантности для $\nu \circ \psi|_{F_Z}$ также будут целыми и отрицательными. Так как поверхность F имеет одну простую эллиптическую особенность, любой дивизор на $\overline{F_Z}$, имеющий отрицательную дискрепантность, появляется на минимальном разрешении $\phi\colon T \to F$. Но существует лишь один ϕ-исключительный дивизор E_0. Его дискрепантность равна -1. Поэтому существует единственный $\nu \circ \psi|_{F_Z}$-исключительный дивизор на $\overline{F_Z}$ и морфизм ν крепантен. Следовательно, поверхность F_Z нормальна, кривая $E|_{F_Z}$ приведена, и F_Z доминируется поверхностью T. Значит, F_Z неособа и $n = 2$. Более того, $E \cap F_Z =: C$ является неособой эллиптической кривой. Заметим, что на E эта кривая имеет бистепень $(2, 2)$. Несложно вычислить, что в этом случае $d = 4$.

Случай $n = 1$. Тогда $F_Z = \psi^* F - E$ и $F_Z|_E = -E|_E$. Таким образом, кривая $E \cap F_Z$ имеет бистепень $(1, 1)$ на E. В частности, $E \cap F_Z$ приведена. Следовательно, поверхность F_Z нормальна. Кроме того, $E \cap F_Z$ приводима. Действительно, иначе поверхность F_Z неособа, но любое разрешение F обязано содержать нерациональную исключительную кривую. Поэтому $E \cap F_Z$ является объединением двух пересекающихся прямых L_1 и L_2. Точка p их пересечения особа на F_Z. Морфизм $\psi|_{F_Z}$ крепантен: $K_{F_Z} = \psi|_{F_Z}^* K_F$. Рассмотрим минимальное разрешение $\chi\colon \widetilde{F} \to F_Z$ и коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} F_Z \arrow[d, "\psi|_{F_Z}"'] & \widetilde{F} \arrow[l, "\chi"'] \arrow[d, "\eta"] \\ F & T \arrow[l, "\phi"] \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

{eq3.

Морфизм η существует, так как ϕ – минимальное разрешение.

Лемма 3.2. *Точка p – простая эллиптическая особенность на F_Z, а морфизм η является сдутием (-1)-кривых $\chi_*^{-1} L_1$ и $\chi_*^{-1} L_2$.*

Доказательство. Предположим, что существует χ-исключительная кривая E', такая что $E' \neq \widetilde{E}_0 := \eta_*^{-1} E_0$. Поскольку дивизор $\chi^{-1}(p)$ связен, можем предполагать, что E' пересекает $\widetilde{E}_0$. Проверяется, что χ крепантен во всех χ-исключительных кривых за исключением $\widetilde{E}_0$ (так как T содержит единственный ϕ-исключительный дивизор E_0 с отрицательной дискрепантностью). Так как $K_{\widetilde{F}}$ является χ-численно эффективным, имеем

$$0 \leqslant K_{\widetilde{F}} \cdot E' = (\chi^* \psi|_{F_Z}^* K_F - \widetilde{E}_0) \cdot E' = -\widetilde{E}_0 \cdot E' \leqslant 0.$$

Следовательно, E' не пересекает $\widetilde{E}_0$. Полученное противоречие показывает, что $\widetilde{E}_0$ – единственная χ-исключительная кривая. Она доминирует $E_0 \subset T$, поэтому это неособая эллиптическая кривая. Ясно, что $\chi_*^{-1}L_1$ и $\chi_*^{-1}L_2$ являются непересекающимися (-1)-кривыми. Доказательство леммы закончено.

Далее, имеем

$$K_{\widetilde{F}} = \chi^*\psi|_{F_Z}^* K_F - \widetilde{E}_0.$$

Отсюда $K_{\widetilde{F}}^2 = d + \widetilde{E}_0^2$. По формуле Нётера $K_{\widetilde{F}}^2 + \chi_{\mathrm{top}}(\widetilde{F}) = 0$. Здесь $\chi_{\mathrm{top}}(\widetilde{F}) = 2$, так как $\widetilde{F}$ является раздутием двух точек на линейчатой поверхности T. Поэтому имеем $K_{\widetilde{F}}^2 = -2$ и $-\widetilde{E}_0^2 = d + 2$. Согласно [13; 4.57] имеем, что $-\widetilde{E}_0^2$ не превосходит размерности касательного пространства в точке p к многообразию Z. Эта размерность равна 3, так как Z неособо. Тогда $d + 2 \leqslant 3$, откуда $d = 1$ и $E_0^2 = -1$.

Мы готовы приступить к доказательству следующей теоремы.

Теорема 3.3. *Рассмотрим расслоение на поверхности дель Пеццо $\pi\colon X \to B \ni o$ над ростком кривой. Пусть X имеет особенности не хуже, чем обыкновенные двойные точки. Предположим, что центральный слой $F = \pi^{-1}(o)$ нерационален и что X имеет особенность, содержащуюся в F. Тогда существует взаимно-однозначное соответствие между такими π и* (*аналитическими и слабыми в случае* (ii)) *$\boldsymbol{\mu}_n$-расслоениями на поверхности дель Пеццо $\pi_V\colon V \to B$ со следующими свойствами*:

- *центральный слой $E_V = \pi_V^{-1}(o)$ является неособой* (*слабой в случае* (ii)) *поверхностью дель Пеццо степени d с $\rho^{\boldsymbol{\mu}_n}(E_V) = 2$,*
- *одномерный локус неподвижных точек действия $\boldsymbol{\mu}_n$ является неособой эллиптической кривой $C \subset E_V$,*
- *действие $\boldsymbol{\mu}_n$ на $\mathbb{P}(N_{C/V})$ тривиально.*

Возможны два случая:

(i) *$d = 4$, $n = 2$, E_V имеет две структуры $\boldsymbol{\mu}_2$-расслоения на коники,*

(ii) *$d = 1$, $n = 4$, E_V имеет $\boldsymbol{\mu}_4$-инвариантную (-1)-кривую*; *помимо эллиптической кривой имеется одна изолированная $\boldsymbol{\mu}_4$-неподвижная точка.*

Доказательство. По предложению 3.1 достаточно рассмотреть два случая: $d = 1$ и $d = 4$.

Случай $d = 4$. Мы используем обозначения предложения 3.1. Сделаем конструкцию замены базы, аналогичную 2.1. Мы построим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
F_W + E_W \subset W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\tau"] & Z \supset F_Z + 2E \arrow[d, "\psi"] \\
E_V \subset V \arrow[d, "\pi_V"] & X \supset F \arrow[d, "\pi"] \\
B' \arrow[r, "\alpha"] & B
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$ {eq3.

где $B' \simeq B$, $\alpha\colon t \mapsto t^2$, и W является нормализацией $Z \times_B B'$. Как и в конструкции 2.1, проверяется, что W неособо, морфизм h разветвлен в $F_W := h^{-1}(F_Z)$ и накрытие

$$h|_{E_W}\colon h^{-1}(E) =: E_W \to E$$

разветвлено в неособой эллиптической кривой $E \cap F_Z$. Группа Галуа $\boldsymbol{\mu}_2$ накрытия h действует на W. По формуле Гурвица поверхность E_W является квартикой дель Пеццо. Несложно проверить, что F_W может быть стянута на неособую эллиптическую кривую. Таким образом, получаем $\boldsymbol{\mu}_2$-эквивариантный морфизм $\tau\colon W \to V$. Имеем $\boldsymbol{\mu}_2$-расслоение на квартики дель Пеццо $\pi_V\colon V \to B$ с неособым центральным слоем E_V. Заметим, что $\rho^{\boldsymbol{\mu}_2}(E_V) = 2$, так как E_V имеет две структуры $\boldsymbol{\mu}_2$-расслоения на коники.

Пусть теперь нам дано $\boldsymbol{\mu}_2$-расслоение на поверхности дель Пеццо $\pi_V\colon V \to B$ степени 4 с условиями как в формулировке теоремы. Проверяется, что мы можем пройти по диаграмме в обратном направлении и получить расслоение на поверхности дель Пеццо $\pi\colon X \to B$ с нерациональным центральным слоем и обыкновенной двойной точкой в качестве особенности.

Случай $d = 1$. Рассмотрим малое разрешение $\psi\colon Z \to X$ обыкновенной двойной точки $x_0 \in X$. Здесь Z – неособое комплексное многообразие. Исключительным множеством морфизма ψ является кривая $L \simeq \mathbb{P}^1$. Как в лемме 3.2, проверяется, что F_Z имеет одну простую эллиптическую особенность, обозначим ее через $z_0 \in F_Z \subset Z$. Рассуждая как в лемме 3.2, получаем, что индекс самопересечения исключительной эллиптической кривой равен -2. Рассмотрим раздутие $\psi'\colon Z' \to Z$ точки z_0 с весами $(1,1,2)$. Из [13; 4.57] следует, что $F_{Z'} = \psi'^{-1}_* F_Z$ является минимальным разрешением для F_Z. Имеем

$$K_{Z'} = \psi'^* K_Z + 3E', \qquad F_{Z'} = \psi'^* F_Z - 4E', \qquad K_{F_{Z'}} = \psi'|^*_{F_{Z'}} K_{F_Z} - E'|_{F_{Z'}},$$

где $E' \simeq \mathbb{P}(1,1,2)$ и $F_{Z'} = \psi'^{-1}_* F_Z$. Заметим, что Z' имеет единственную особенность типа $(1/2)(1,1,1)$ и что линейчатая поверхность $F_{Z'}$ имеет один приводимый слой. Мы построим следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F_{W'} + E_{W'} \subset W' \arrow[dd, "\tau"] & F_W + E_W \subset W \arrow[l, dashed, "h'"'] \arrow[r, "h"] & Z' \supset F_{Z'} + 4E_{Z'} \arrow[d, "\psi'"] \\
 & & Z \supset F_Z \arrow[d, "\psi"] \\
E_V \subset V \arrow[d, "\pi_V"] & & X \supset F \arrow[d, "\pi"] \\
B' \arrow[rr, "\alpha"] & & B
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

{eq3.

где $B' \simeq B$, $\alpha\colon t \mapsto t^4$, и W является нормализацией $Z \times_B B'$. Как и в предыдущем случае, многообразие W неособо, морфизм h разветвлен в $F_W := h^{-1}(F_Z)$ и накрытие $h|_{E_W}$ разветвлено в неособой эллиптической кривой $E_W \cap F_W$, где $E_W := h^{-1}(E_{Z'})$. Группа Галуа $\boldsymbol{\mu}_4$ накрытия h действует на многообразии W, и центральный слой $\pi_W^{-1}(o) = F_W + E_W$ приведен. По формуле Гурвица E_W является поверхностью дель Пеццо степени 2. Проверяется, что E_W неособа. Заметим, что линейчатая поверхность $F_W \simeq F_{Z'}$ имеет один приводимый слой $f'_W = f_1 + f_2$. Обе компоненты f_1 и f_2 являются (-1)-кривыми на F_W. Без ограничения общности предположим, что f_1 пересекает эллиптическую кривую $C_W := F_W \cap E_W$.

Сделаем флоп h' в кривой f_1. Мы используем конструкцию флопа Атьи–Куликова, см. например, [16; 4.2]. Получим многообразие W' с центральным слоем

$$E_{W'} + F_{W'},$$

где $E_{W'}$ и $F_{W'}$ – собственные прообразы E_W и F_W соответственно, $E_{W'}$ является раздутием точки на E_W, а F'_W получается сдутием кривой f_1 на F_W. Заметим, что $E_{W'}$ – неособая слабая (т.е., $-K_{E_{W'}}$ численно эффективен и обилен) поверхность дель Пеццо степени 1. Поверхность $F_{W'}$ линейчата и может быть стянута на неособую эллиптическую кривую. В итоге получаем $\boldsymbol{\mu}_4$-расслоение $\pi_V\colon V \to B$ на поверхности дель Пеццо степени 1.

Пусть теперь нам дано $\boldsymbol{\mu}_4$-расслоение на поверхности дель Пеццо $\pi_V\colon V \to B$ степени 1 с условиями как формулировке теоремы. Проверяется, что мы можем пройти по диаграмме в обратном направлении и получить расслоение на поверхности дель Пеццо $\pi\colon X \to B$ с нерациональным центральным слоем и обыкновенной двойной точкой в качестве особенности.

Автор выражает благодарность Ю. Г. Прохорову за многочисленные полезные обсуждения, А. Г. Кузнецову, Д. А. Минееву и К. А. Шрамову за ценные комментарии, Дж. Бланку за постановку вопроса 1.6, а также рецензенту за замечания, касающиеся теоремы 3.3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] V. A. Iskovskikh, Yu. G. Prokhorov, *Algebraic Geometry. V. Fano Varieties*, Encyclopaedia Math. Sci., **47**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[2] F. Hidaka, K. Watanabe, “Normal Gorenstein surfaces with ample anti-canonical divisor”, *Tokyo J. Math.*, **04**:2 (1981), 319–330.

[3] S. Mori, Yu. G. Prokhorov, “Multiple Fibers of del Pezzo Fibrations”, *Многомерная алгебраическая геометрия*, Тр. МИАН, **264**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2009, 137–151.

[4] M. Kontsevich, Yu. Tschinkel, *Specialization of Birational Types*, 2017, arXiv: 1708.05699.

[5] B. Totaro, “Rationality does not specialise among terminal varieties”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **161**:1 (2016), 13–15.

[6] A. Perry, “Rationality does not specialize among terminal fourfolds”, *Algebra Number Theory*, **11**:9 (2017), 2193–2196.

[7] T. Fujisawa, “On non-rational numerical del Pezzo surfaces”, *Osaka J. Math.*, **32**:3 (1995), 613–636.

[8] K. Matsuki, *Introduction to the Mori Program*, Springer, New York, 2002.

[9] Y. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki, “Introduction to the minimal model problem”, *Algebraic Geometry, Sendai*, 1985, Adv. Stud. Pure Math., **10**, North-Holland, Amsterdam, 1987, 283–360.

[10] Y. Kawamata, “Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces”, *Ann. of Math.* (2), **127**:1 (1988), 93–163.

[11] M. Reid, “Nonnormal del Pezzo surfaces”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **30**:5 (1994), 695–727.

[12] M. Abe, M. Furushima, “On non-normal del Pezzo surfaces”, *Math. Nachr.*, **260** (2003), 3–13.

[13] J. Kollár, Sh. Mori, *Birational Geometry of Algebraic Varieties*, Cambridge Tracts in Math., **134**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[14] J. Kollár, *Singularities of the Minimal Model Program*, Cambridge Tracts in Math., **200**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013.

[15] I. V. Dolgachev, V. A. Iskovskikh, "Finite subgroups of the plane Cremona group", *Algebra, Arithmetic, and Geometry*, Progr. Math., **269**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2009, 443–548.

[16] Вик. С. Куликов, "Вырождения $K3$ поверхностей и поверхностей Энриквеса", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:5 (1977), 1008–1042.

К. В. Логинов
Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва
E-mail: kostyaloginov@gmail.com

Поступило
20.11.2018
Принята к публикации
20.03.2019